Funciones racionales

La función racional

Una ***función racional*** es una función que se puede expresar de la forma

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$$ donde f(x) y g(x) son funciones polinómicas.

Ejemplos:

$$y=\frac{1}{x-2}$$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}^3-4\boldsymbol{x}^2+4\boldsymbol{x}}{3}$$

$$f(x)=\frac{2x}{3-x}$$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})=\frac{4}{\boldsymbol{x}^2-3\boldsymbol{x}-4}$$

$$g(x)=\frac{x^2-4}{x^3-9x}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\frac{2\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-5}{\boldsymbol{x}^2+2}$$

Dominio de una función racional

- El *dominio* de una función es el conjunto de todos los números para los cuales una función está definida.
- Una función, f(x), está definida en un valor de *x* si al evaluar f(x) produce un número real.
- En el caso de las **funciones racionales**, debemos **excluir** del conjunto de los números reales **cualquier valor que hace que el** denominador sea igual a cero.

Dominio de una función racional

1) Determinar el dominio de $f(x)=\dfrac{2}{4x-1}$.

Debemos determinar los valores de x que hacen el denominador igual a 0 (los ceros del denominador).

$4x - 1 = 0$

$4x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

Por lo tanto el dominio es, el conjunto de los reales excepto x = ¼.

El dominio se describe en notación:

$D: \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ $\quad D: \left\{x \in R \mid x \neq \frac{1}{4}\right\}$

Dominio de una función racional

2) Determinar el dominio de $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$.

Debemos determinar los valores de x que hacen el denominador igual a 0 (los ceros del denominador).

$x^2 - 4 = 0$ Usando el método de la raiz cuadrada,

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

El dominio de f(x) consiste de todos los reales excepto x = 2 y x= - 2.

Dom: $\{x \in R | x \neq 2 \ y \ x \neq -2\}$

$\text{Dom}: (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

Dominio de una función racional

4) $$f(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 1}$$

Debemos determinar los valores de x que hacen el denominador igual a 0 (los ceros del denominador).

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

No existe un valor que se le puede asignar a x tal que x^2 sea igual a -1. Por lo tanto, el dominio es el conjunto todos los reales.

$$\text{Dom}: \ \mathrm{R}$$

$$\text{Dom}: (-\infty, \infty)$$

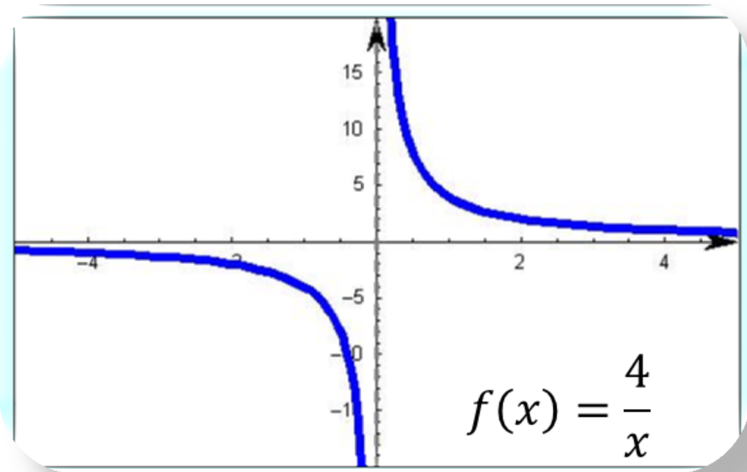
Interceptos

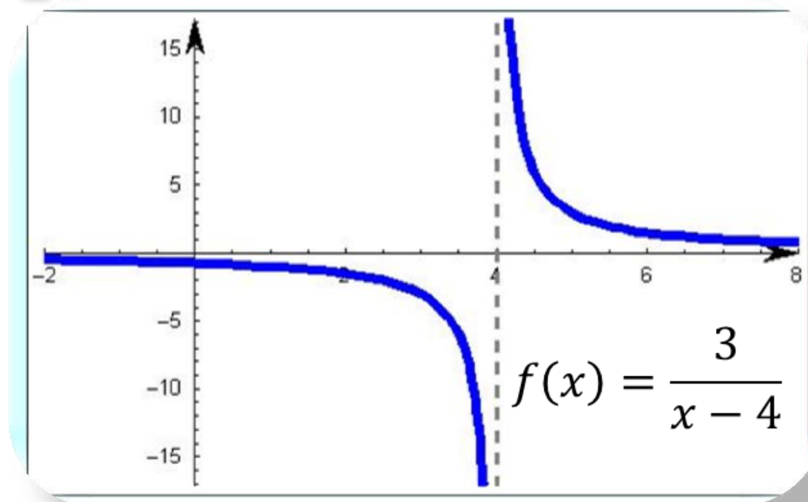
- **Interceptos en x**
  - punto donde la gráfica interseca el eje de x.
  - para una función racional, el intercepto en x ocurre en el valor de x que hace que **el numerador de la función sea igual a cero**.
  - la cantidad de interceptos en x depende del grado del numerador.
  - $0 \leq \#$ interceptos en x $\leq$ grado del numerador

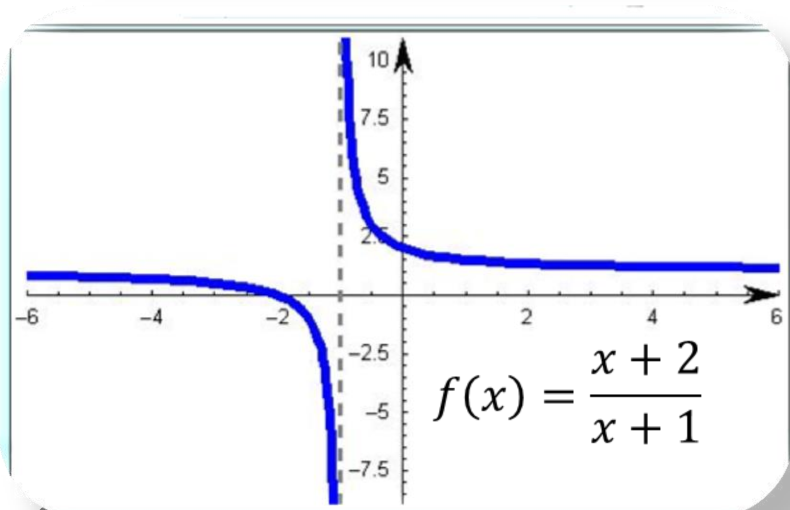
Interceptos

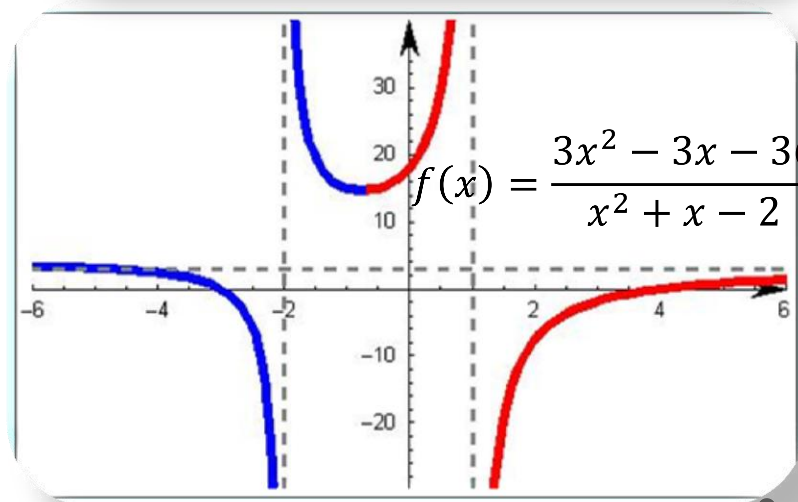
- ***Intercepto en y***
  - punto donde la gráfica interseca el eje de y.
  - Es **el valor de la función cuando x = 0**. [f(0)]
  - Si $x = 0$ está en el dominio de $f(x)$, entonces existe un sólo intercepto en y.
  - Si $x = 0$ NO está en el dominio de $f(x)$, NO existe el intercepto en y.

Interceptos









Interceptos

- Hallar los ***interceptos*** de cada función.

$$(1)\ \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-2}}$$

(a) intercepto – y:

$$f(0) = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

El intercepto en y es

(0, - ½).

b) intercepto - x

El numerador de f(x) es 1. $1 \neq 0$. Por lo tanto, f(x) NO tiene interceptos en x.

Interceptos

- Hallar los ***interceptos*** de cada función.

$$2)\ \ f(x) = \frac{2x}{3-x}$$

(a) intercepto – y:

$$f(0) = \frac{2(0)}{3-0} = \frac{0}{3} = 0$$

El intercepto en y es

(0, 0).

b) intercepto - x

El numerador de f(x) es 2x.

2x = 0 cuando x = 0.

Por lo tanto, *f(x)* tiene intercepto en x en el punto (0,0) o sea que coincide con el intercepto en y.

Interceptos

- Hallar los ***interceptos*** de cada función.

$$3)\ g(x) = \frac{x^2 - 2}{x^3 - 9x}$$

(a) intercepto – y:

$$g(0) = \frac{(0)^2 - 2}{(0)^3 - 9(0)} = \frac{-2}{0}$$

g(0) NO está definido.

NO existe intercepto en y.

b) intercepto - x

El numerador de g(x) es $x^2 - 2$.

Si despejamos $x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$

g(x) tiene interceptos en x en

$(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$

Soluciones de funciones racionales

Un par ordenado (a,b) es una ***solución*** de una función *f(x)* si *f*(a)=b. Dicho de otra forma, si al evaluar *f* en x=a el resultado es b.

Ej. Determinar si (6, 1) es una solución de $f(x) = \frac{2x-1}{x+5}$

$$f(6) = \frac{2(6)-1}{(6)+5} = \frac{12-1}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

(6, 1) **SI** es una solución de la función.

Soluciones de funciones racionales

Ej. Determinar el valor de *a* tal que (a, 4) es una solución de

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{5\boldsymbol{x} - 2}{3 + \boldsymbol{x}}$$

$$\frac{5a - 2}{3 + a} = 4$$

$$5a - 2 = 4(3 + a)$$

$$5a - 2 = 12 + 4a$$

$$5a - 4a = 12 + 2$$

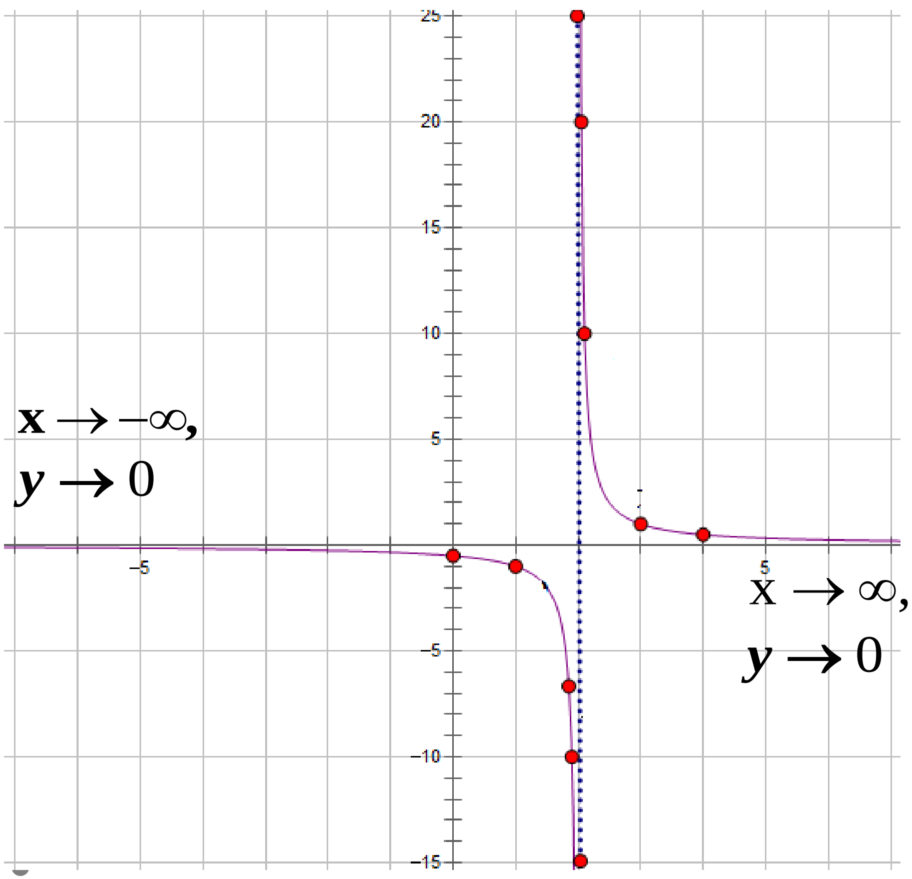
$$a = 14$$

(14,4) es una solución de la función.

Gráficas de funciones racionales

Observemos la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$



Comportamiento en los extremos

A medida que los valores de **x se hacen más negativos**, los valores de la función **(y) se acercan más y más a cero**.

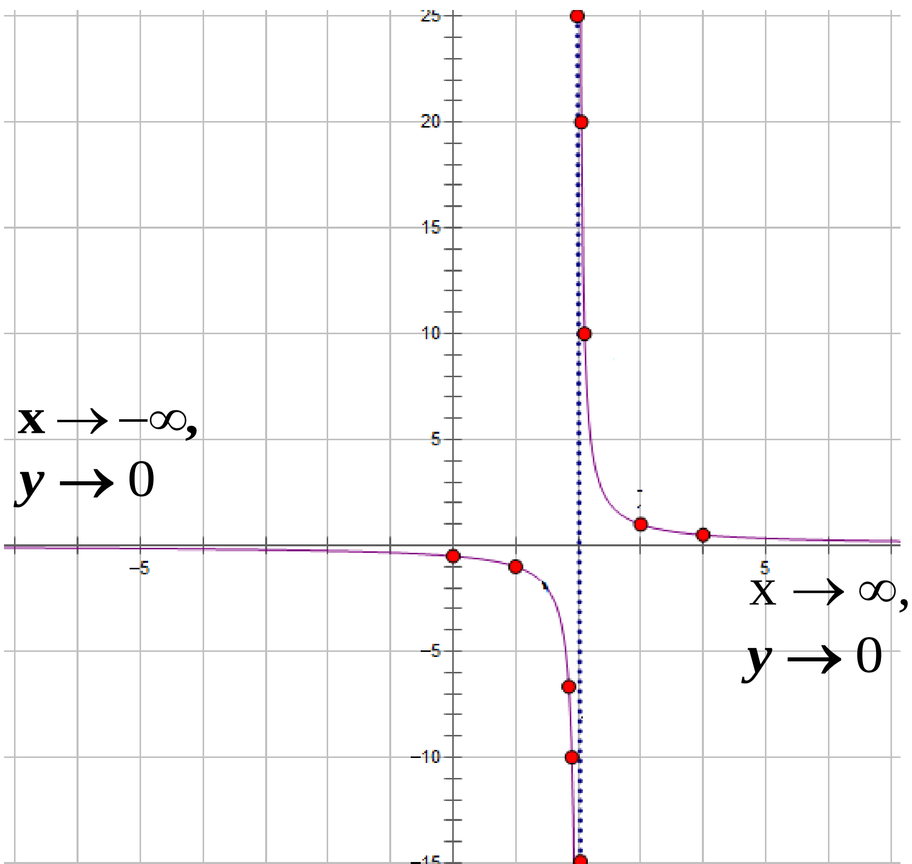
A medida que los **valores de x se hacen más positivos**, los valores de la función **(y) se acercan más y más a cero.**

y = 0 es una **asíntota horizontal**

Gráficas de funciones racionales

Observemos la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$



Comportamiento en los extremos

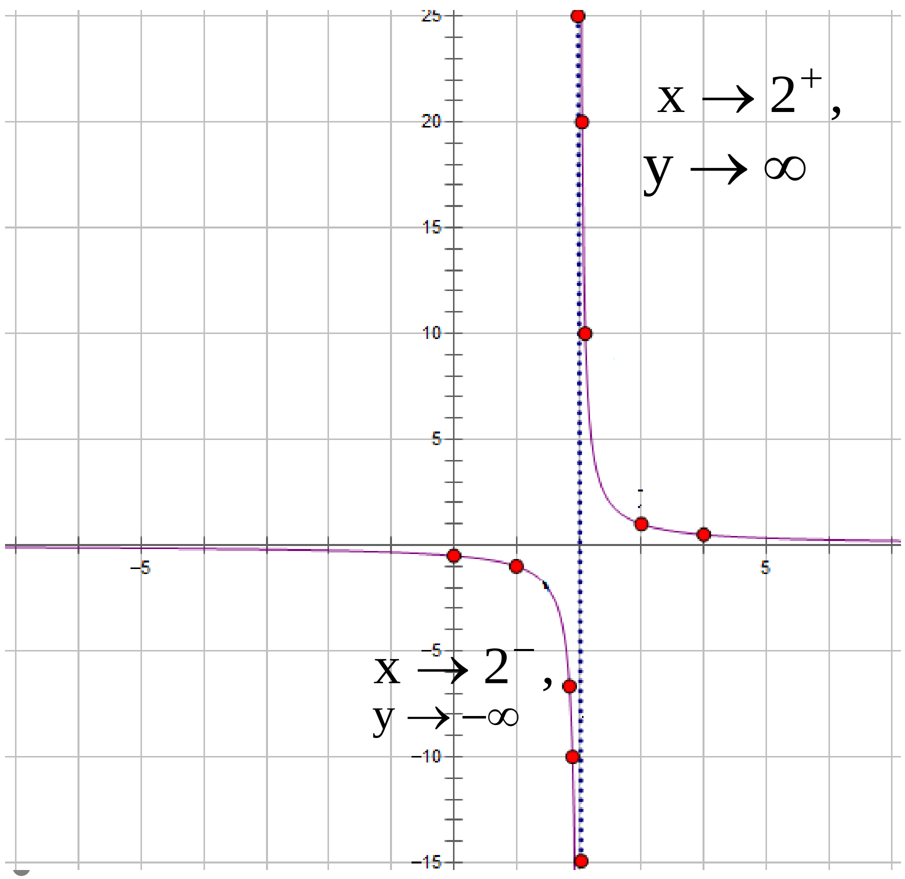
y = 0 es una **asíntota horizontal**

La línea ***y*** **=** ***k*** es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de una función *f* si f (x) →k cuando x→ ∞ o x→ − ∞ .

Gráficas de funciones racionales (cont.)

Observemos la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$



Comportamiento alrededor de x=2

A medida que los valores de **x se acercan a 2** por valores mayores que 2 , la función **(y) se hace más positivo**.

A medida que los valores de **x se acercan a 2** por valores menores que 2, los valores de la función **(y) se hace más negativos.**

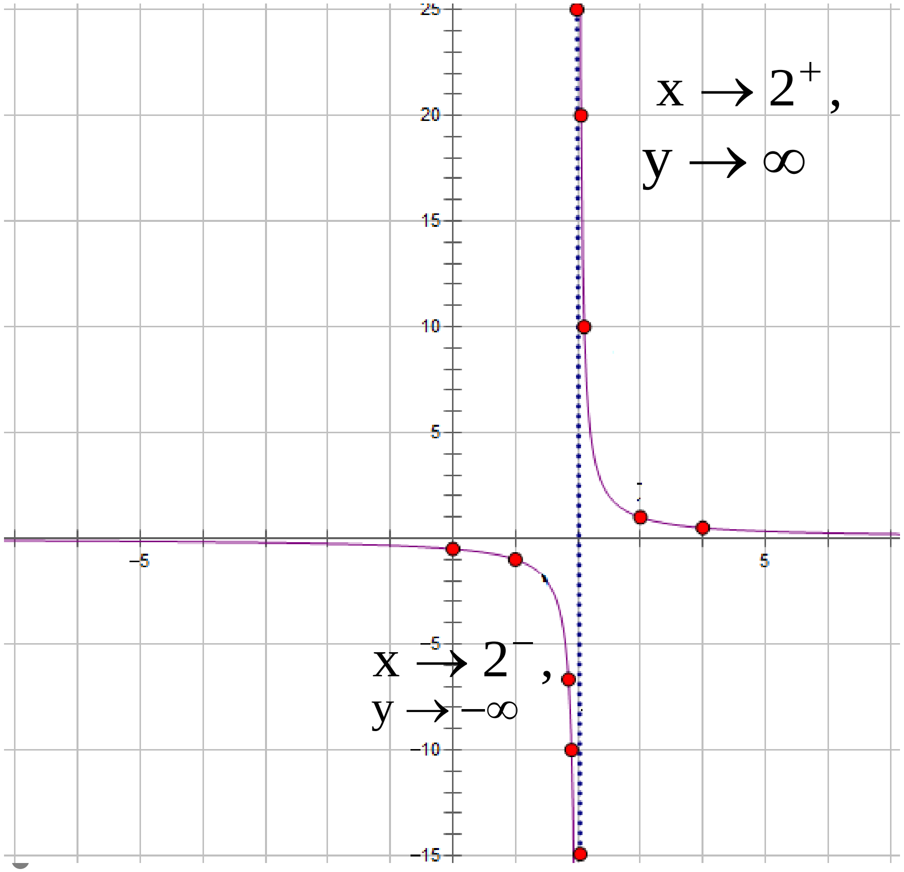
x = 2 es una **asíntota vertical**

Gráficas de funciones racionales (cont.)

Observemos la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

x = 2 es una **asíntota vertical**



La línea $\boldsymbol{x = c}$ es una ***asíntota vertical*** de la gráfica de una función *f* si $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$?? cuando x asume valores cercanos ***c*** por la izquierda o la derecha.

Hallar las asíntotas de funciones racionales

Asíntotas Verticales

Una función racional tiene una **asíntota vertical** cuando el denominador de la función *simplificada* es igual a 0.

Una función racional está simplificada si NO existen factores comunes, distintos de uno, entre el numerador y denominador.

Hallar la ecuación de cada asíntota vertical si existe.

1. $f(x) = \dfrac{2-5x}{2+2x}$

Calculamos los valores de x que hacen el denominador igual a cero:
$2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$

La recta $x = -1$ es la única asíntota vertical de la función.

Asíntotas horizontales – Caso 1

Las asíntotas horizontales aparecen cuando ocurre una de las siguientes condiciones:

1. El grado del numerador es ***menor*** que el grado del denominador. En este caso, la asíntota es la recta horizontal $y = 0$.

$$\boldsymbol{Ej.}\ f(x) = \frac{3}{3x - 15}$$

$$g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 16}$$

El eje de x (y=0) es la asíntota horizontal de las gráficas de f(x) y g(x)

Asíntotas horizontales – Caso 2

2. El grado del numerador es ***igual*** al grado del denominador. En este caso, la asíntota es la recta horizontal $y = \frac{a}{b}$, donde ***a*** **es el coeficiente principal del numerador** y ***b*** **es el coeficiente principal del denominador.**

$$\textit{Ej.}\ f(x) = \frac{9x+1}{3x-15}$$

$$g(x) = \frac{4x^2+1}{16-x^2}$$

La asíntota horizontal de la gráfica de

f(x) es $\mathbf{y} = \frac{9}{3}$ **o** $\mathbf{y} = 3$

g(x) es $\mathbf{y} = \frac{4}{-1}$ **o** $\mathbf{y} = -4$

Asíntotas horizontales – Caso 3

3. Cuando el grado del numerador es ***mayor*** que el grado del denominador la función NO tiene asíntota horizontal.

$$Ej.\ f(x) = \frac{5x^3 - 4x + 7}{3x - 15}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 1}$$

Las gráficas de f(x) y g(x) NO tienen asíntota horizontal

Hallar la ecuación de cada asíntota horizontal si existe.

1. $f(x) = \dfrac{2-5x}{2+2x}$

El grado del numerador y del denominador es 1.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{-5}{2}$$

La asíntota horizontal de la f(x) es la recta

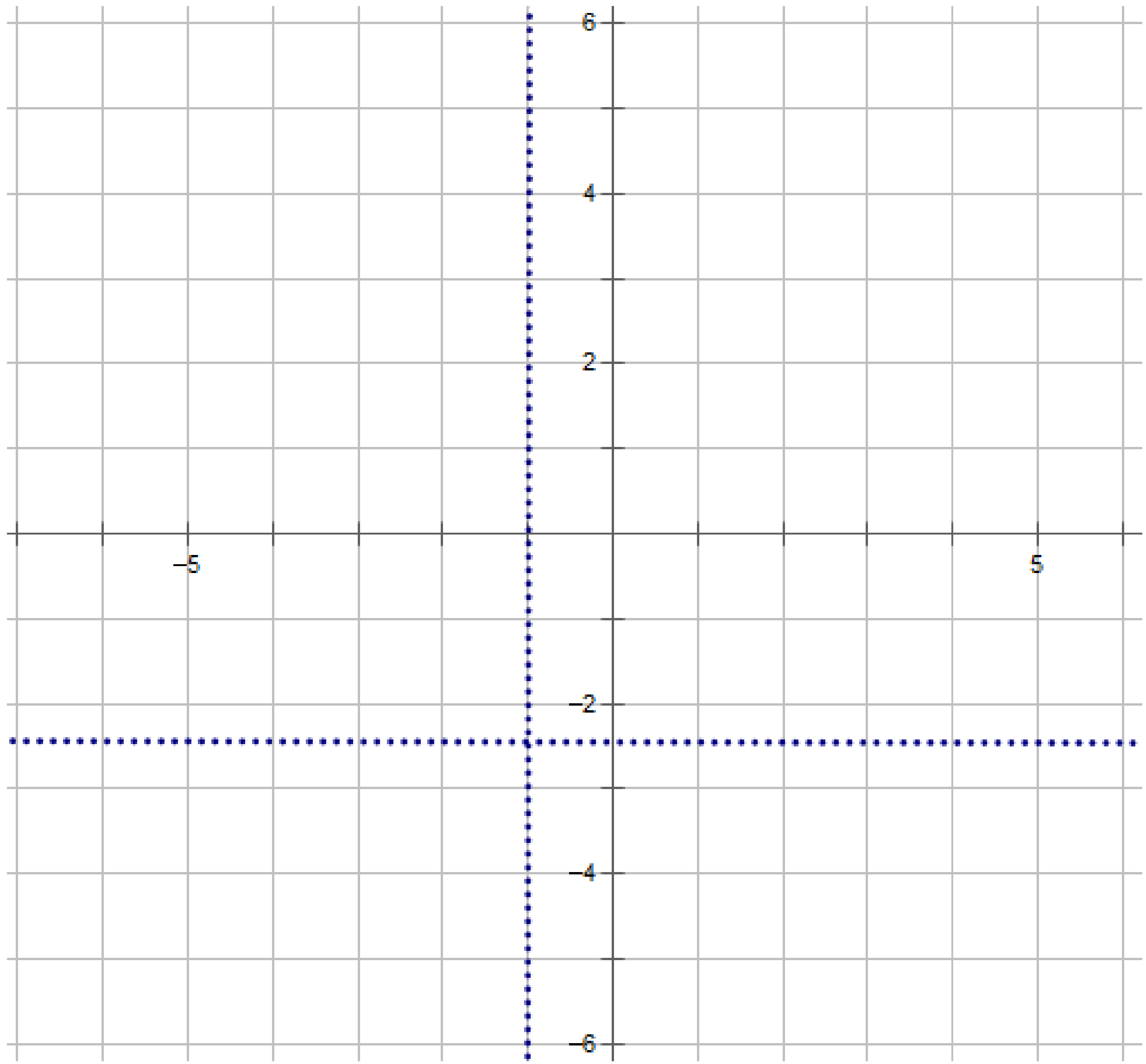
$$y = -\tfrac{5}{2}$$

Gráficas de funciones racionales

$$f(x) = \frac{2 - 5x}{2 + 2x}$$

Vimos que la asíntota vertical es
x = -1
y la horizontal es

$$y = -\frac{5}{2}$$



Gráficas de funciones racionales

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{2-5\mathbf{x}}{2+2\mathbf{x}}$$

Intercepto x:

$2 - 5x = 0$

$x = \frac{2}{5}$ $\quad\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

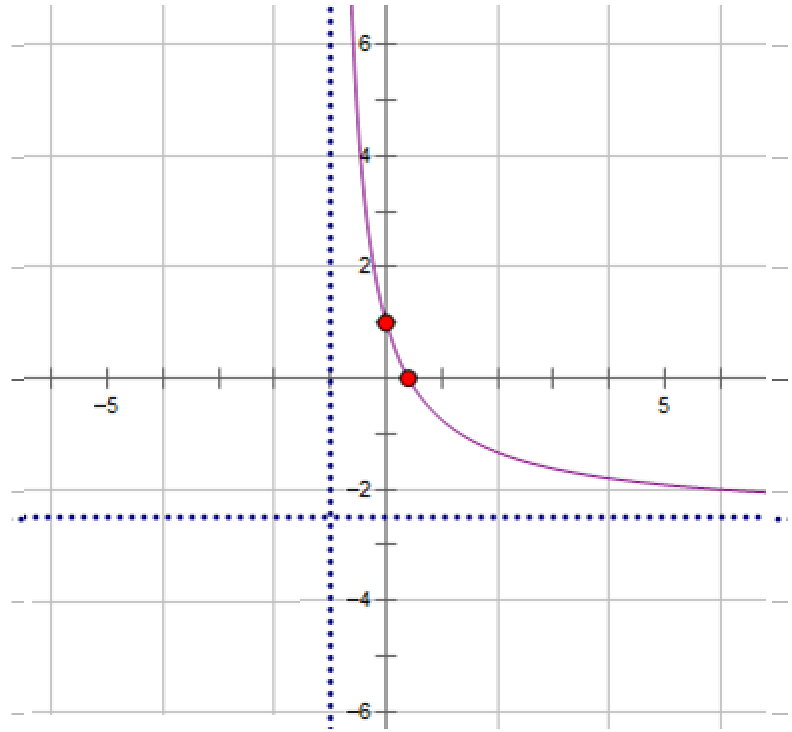
Intercepto y:

$$\mathbf{f}(0) = \frac{2-5(0)}{2+2(0)}$$

$$\mathbf{f}(0) = 1$$

(0, 1)

Podemos unir los dos puntos con una curva suave que se acerca a las asíntotas.



Gráficas de funciones racionales

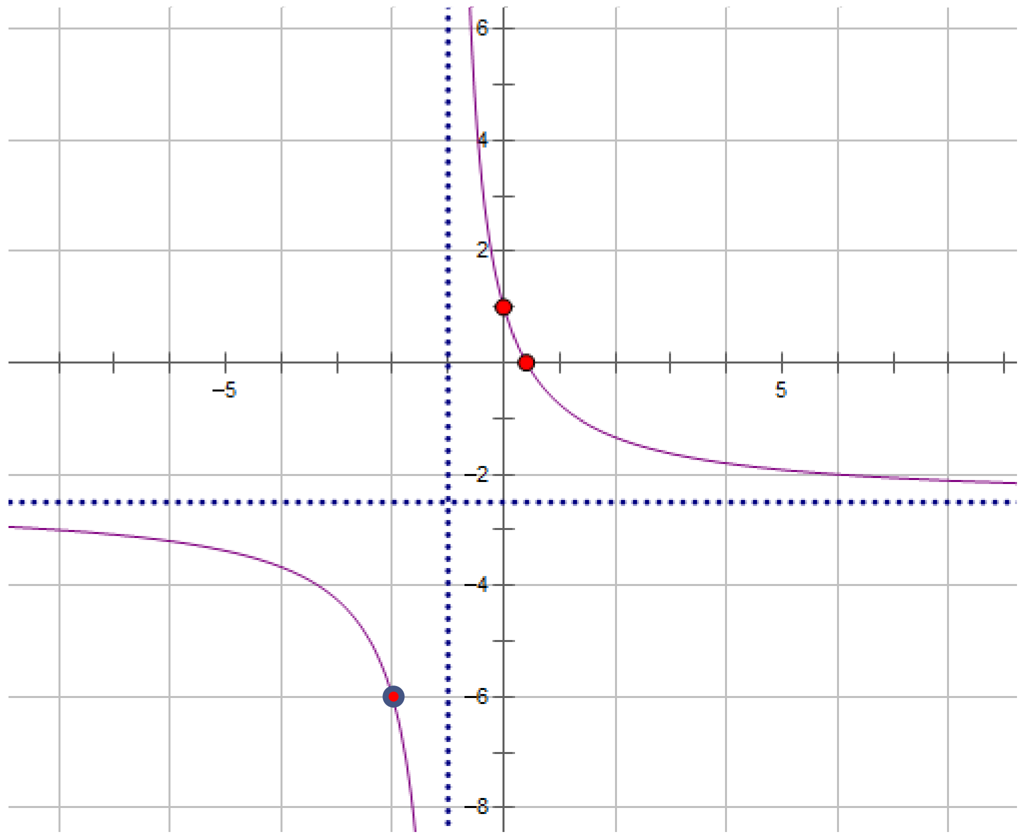
Debemos evaluar la función en algunos otros puntos para localizar la otra parte de la gráfica.

$$f(x) = \frac{(2-5x)}{(2+2x)}$$

$$\boldsymbol{f}(-2) = \frac{2-5(-2)}{2+2(-2)}$$

$$= \frac{12}{-2} = -6$$

$(-2,-6)$



Gráficas de funciones racionales

Para trazar gráficas de funciones racionales podemos seguir los siguientes pasos:

- Determinar si existen asíntotas verticales.
- Determinar si existe el asíntota horizontal.
- Determinar si existen interceptos.
- Determinar comportamiento alrededor de las asíntotas. Tal vez se necesiten unos puntos adicionales.
- Unir puntos con curvas suaves que se quedan alrededor de las asíntotas.

Trazar la gráfica de:

$$f(x)=\frac{2x^2+10x+12}{x^2-9}$$

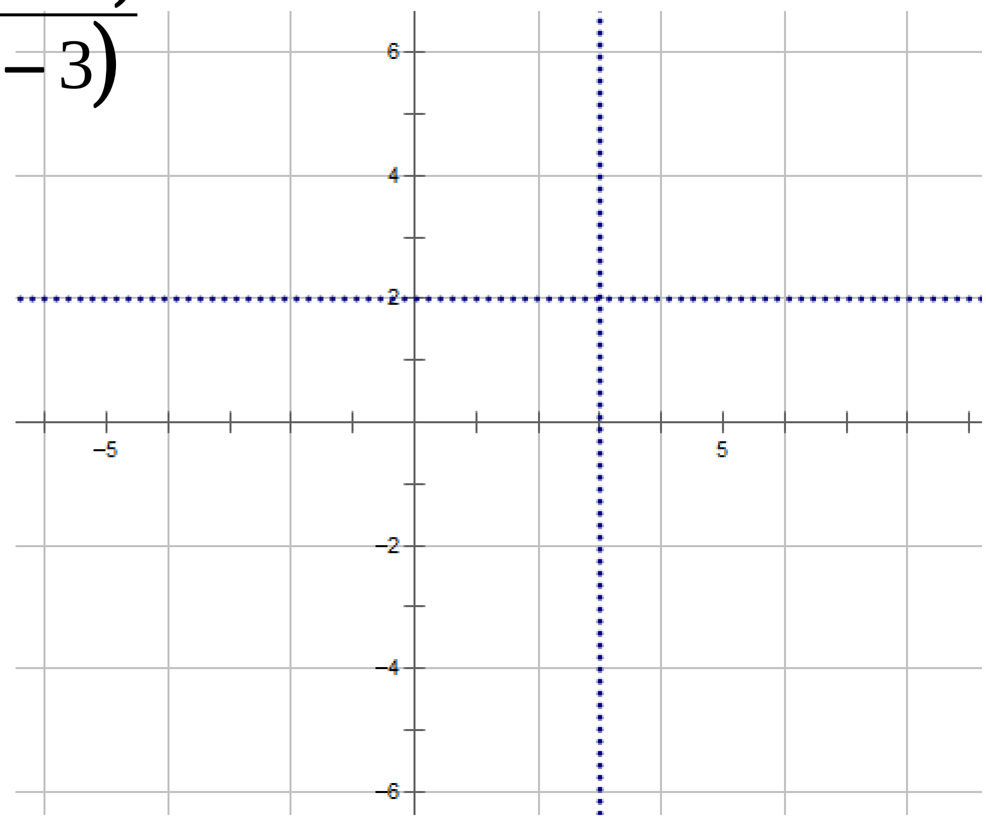
Primero simplicamos la función.

$$\frac{2x^2+10x+12}{x^2-9}=\frac{\cancel{(x+3)}(2x+4)}{\cancel{(x+3)}(x-3)}$$

$$=\frac{2x+4}{x-3}$$

La recta vertical $x = 3$ es la única asíntota vertical de esta función.

La recta horizontal $y = 2$ es la asíntota horizontal de esta función.



Trazar la gráfica de: $f(x)=\dfrac{2x^2+10x+12}{x^2-9}$

Determinemos los interceptos.

$$f(0)=\frac{2(0)^2+10(0)+12}{(0)^3-9}$$

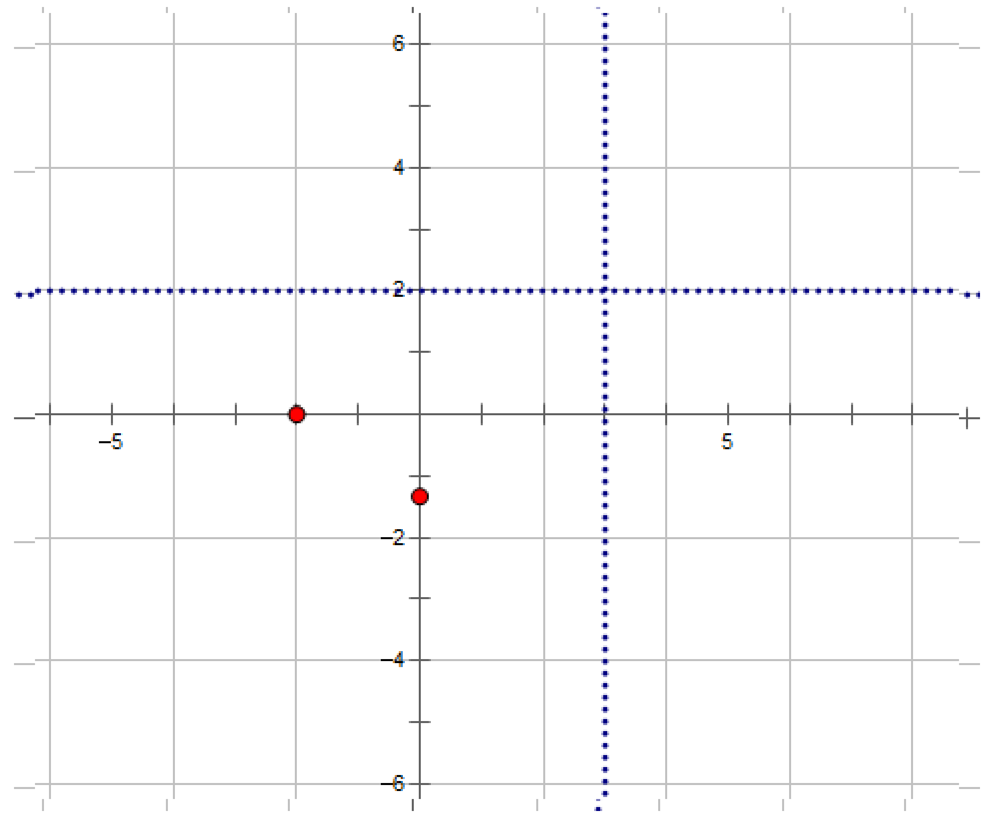
$$=-\frac{12}{9}=-\frac{4}{3}$$

$$\left(0,-\frac{4}{3}\right)$$

$$f(-2)=\frac{2(-2)^2+10(-2)+12}{(-2)^2-9}$$

$$=\frac{0}{-13}=0$$

$$(-2,0)$$



Trazar la gráfica de:

$$f(x)=\frac{2x^2+10x+12}{x^2-9}$$

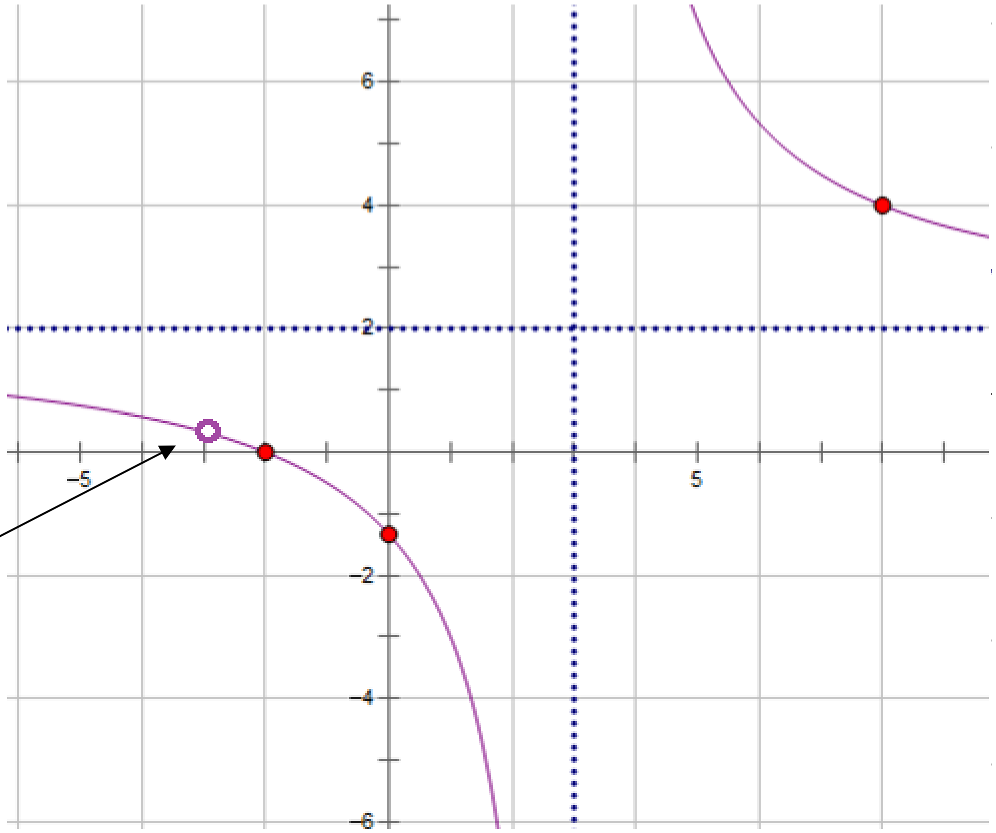
Busquemos un punto adicional:

$$f(8)=\frac{2(8)^2+10(8)+12}{(8)^2-9}$$

$$f(8)=\frac{220}{55}=4$$

$$(8,4)$$

NOTE el hueco en el punto $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$



Trazar la gráfica de: $f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$

Intercepto - y:

$$f(0)=\frac{2(0)}{3-(0)}=\frac{0}{3}=0$$

Intercepto - x

$$\frac{2x}{3-x}=0$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

$$(0,0)$$

Asíntota vertical:

Calculamos los valores de x que hacen el denominador igual a cero:

3 - x = 0 $\Rightarrow$ **x = 3**

(ecuación de la asíntota)

Asíntota horizontal:

$$\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{a_n}}{\boldsymbol{b_n}}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$\boldsymbol{y}=-2$$

(ecuación de la asíntota)

Puntos adicionales

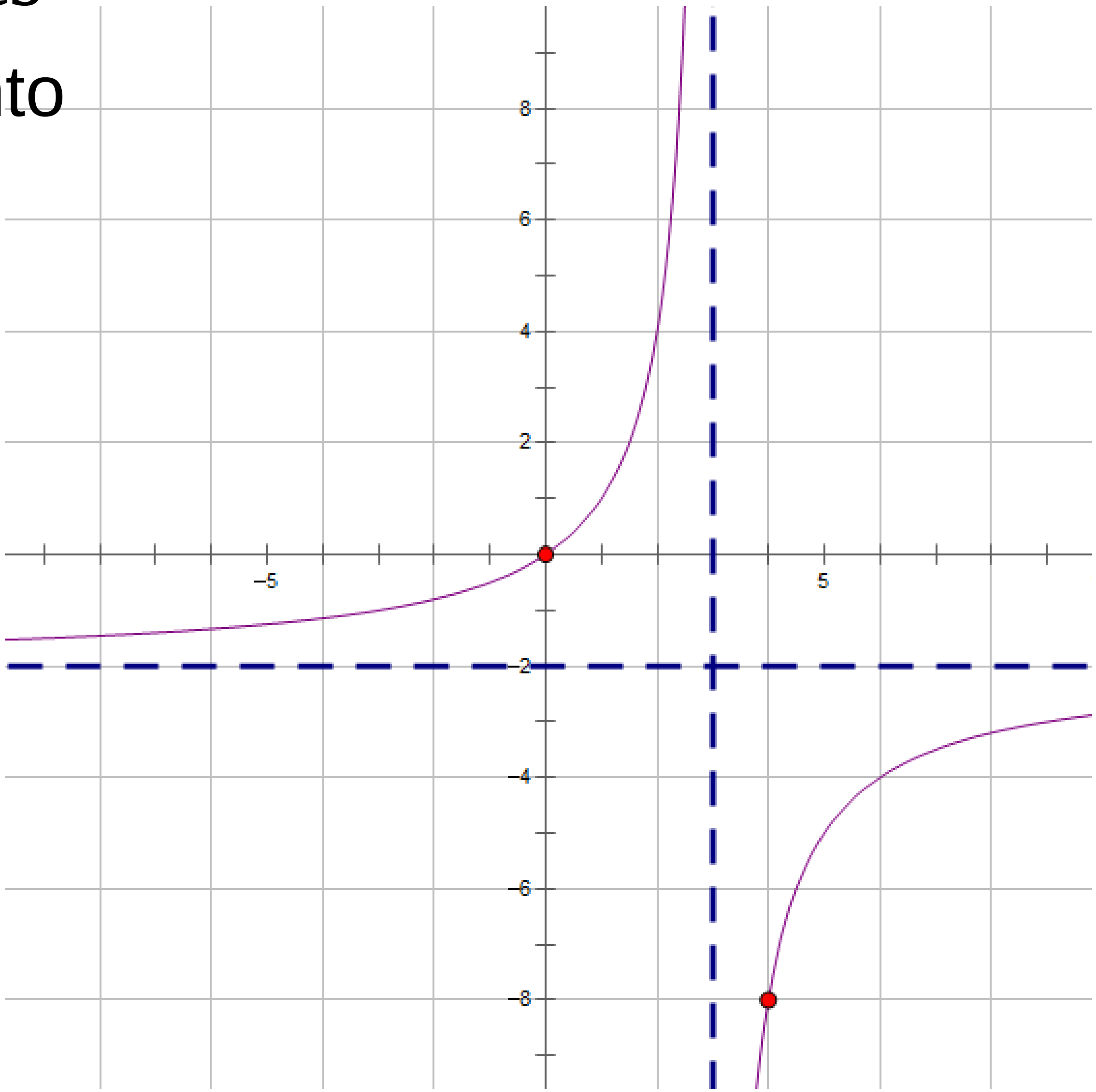
Busquemos un punto adicional:

$$f(4) =$$

$$= \frac{2(4)}{3-4}$$

$$= \frac{8}{-1} = -8$$

$$(4,-8)$$



Trazar la gráfica de f^{-1}, si $f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$

Solución:

Como f y f^{-1} intercambian dominio y campo de valores, tenemos que:

- El punto (0,0) $\in f^{-1}$.
- El punto (-8,4) $\in f^{-1}$.
- f^{-1} tiene una asíntota vertical en x = -2
- f^{-1} tiene una asíntota horizontal en y = 3

Puntos adicionales

Busquemos un punto adicional:

$$\frac{2x}{3-x} = -4$$

$$2x = -4(3-x)$$

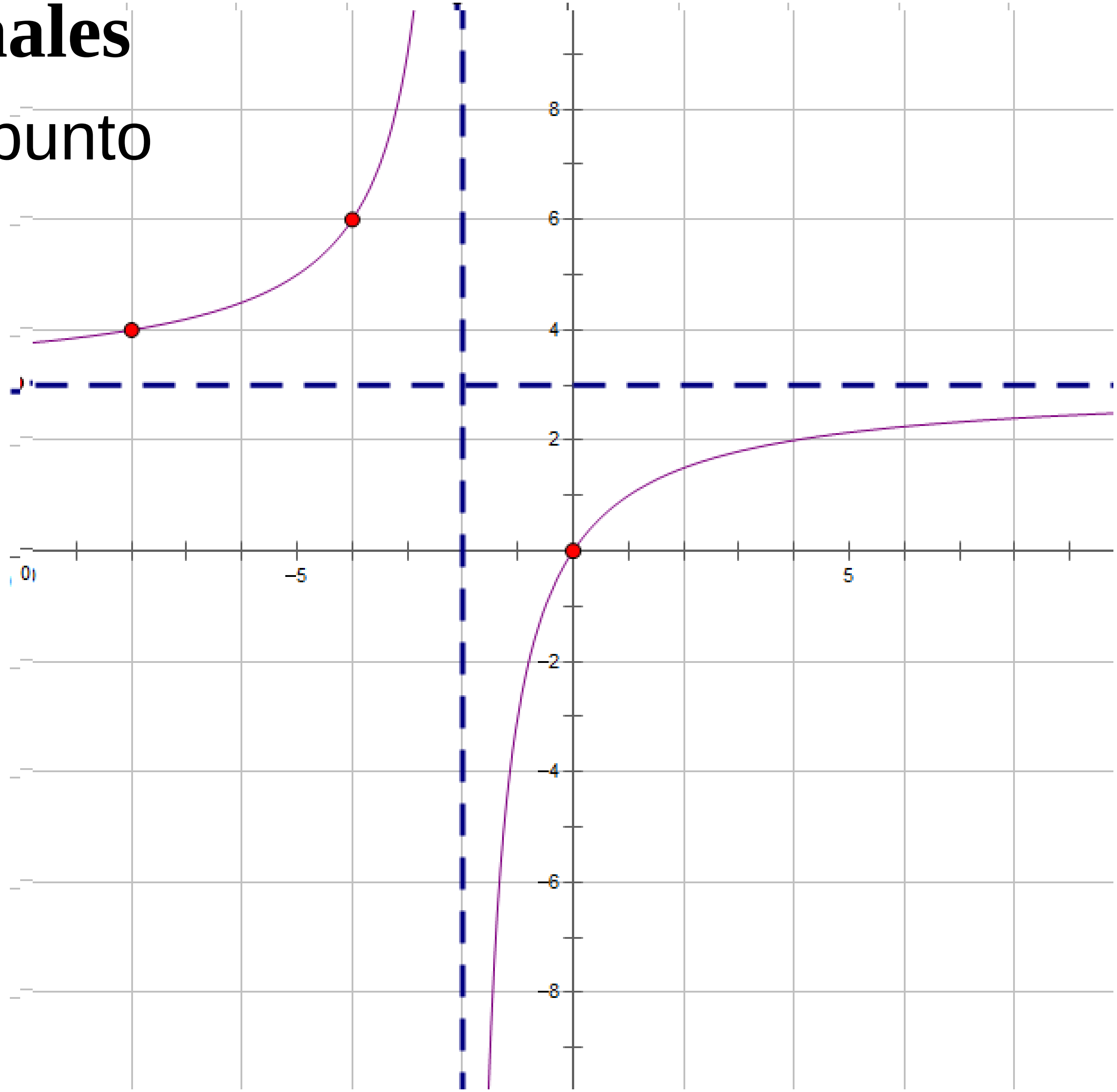
$$2x = -12 + 4x$$

$$-2x = -12$$

$$x = 6$$

$$(6,-4) \in f(x)$$

$$(-4,6) \in f^{-1}(x)$$



Determinar f^{-1}, si $f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$

Solución:

$$f(x)=\frac{2x}{3-x}$$

$$x=\frac{2y}{3-y}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{3x}{2+x}$$

$$x(3-y)=2y$$

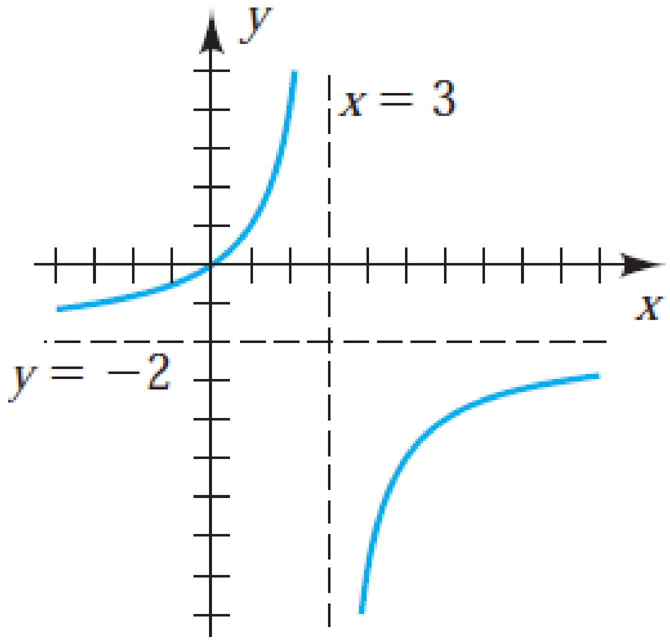
$$3x-xy=2y$$

$$3x=2y+xy$$

$$3x=y(2+x)$$

$$\frac{3x}{2+x}=y$$

Use la gráfica para completar cada enunciado.



(a) As $x \to -\infty$, $f(x) \to$ **−2**.

(b) As $x \to \infty$, $f(x) \to$ **−2**.

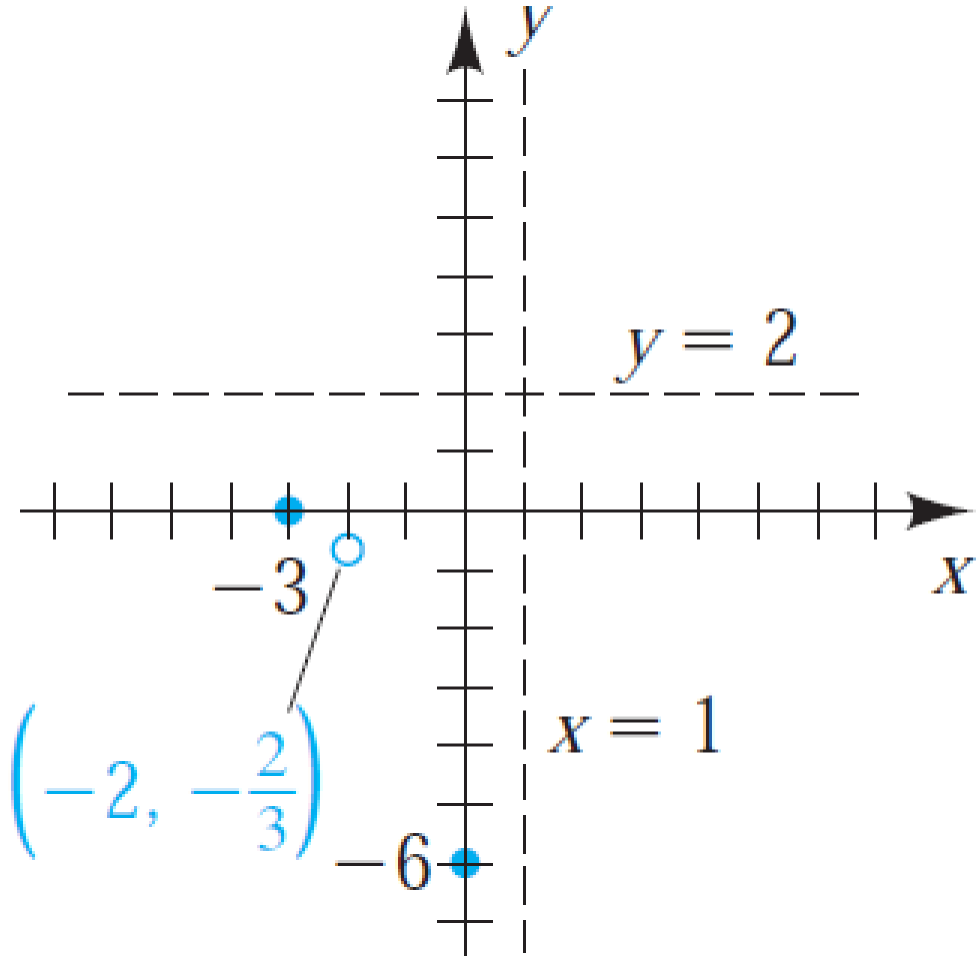
(c) As $x \to 3^-$, $f(x) \to$ **∞**.

(d) As $x \to 3^+$, $f(x) \to$ **−∞**.

(e) As $x \to 0$, $f(x) \to$ **0**.

Aplicación

Las asíntotas, los interceptos, y los agujeros de una función racional, *f*, se muestran en la figura. Dibuje una gráfica y encuentre una ecuación para *f*.



La relación entre la densidad poblacional (en personas $/mi^2$) de una ciudad grande y la distancia x (en millas) desde el centro de la ciudad está dado por

$$d(x) = \frac{500x}{x^2 + 36}$$

a) ¿Qué ocurre con la densidad cuando la distancia desde el centro de la ciudad cambia de 20 millas a 25 millas?

(b) ¿Qué ocurre eventualmente con la densidad ?

(c) ¿En qué áreas de la ciudad es la densidad de población mayor que 400 personas$/mi^2$?